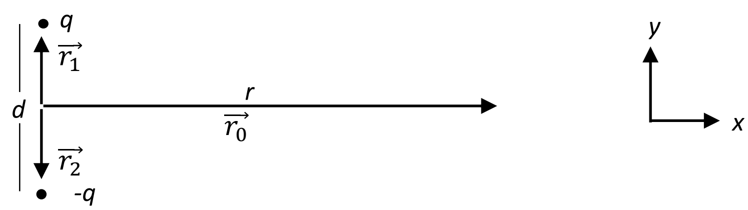
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía I

Problema 1. Calcule el campo eléctrico de un cuadripolo muy lejos de este $(d \ll r)$.
Primero calcularemos el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico



Por la definición de campo eléctrico y principio de superposición tenemos:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r_0} - \vec{r_i}|^3} (\vec{r_0} - \vec{r_i})$$

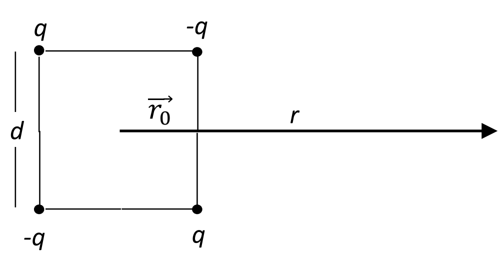
Según el sistema de referencia escogido; para la carga q: $\vec{r_1} = \frac{d}{2}\hat{\jmath}$ para la carga -q: $\vec{r_2} = -\frac{d}{2}\hat{\jmath}$ y el punto donde se está calculando el campo eléctrico $\vec{r_0} = r\hat{\imath}$. Reemplazando esto en la ecuación anterior y simplificando obtenemos:

$$\vec{E} = -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}\hat{\jmath} = -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3 \left(1 + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{3/2}}\hat{\jmath}$$

Ya que $\frac{d}{r} \ll 1$, podemos usar la aproximación $(1+x)^n \approx 1 + nx$, entonces $\left(1 + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3d^2}{8r^2}$

$$\vec{E} \approx -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 + \frac{3d^2}{8r^2}\right)\hat{\jmath} \approx -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\jmath}$$

Para el cuadripolo eléctrico; consideramos el sistema como si estuviera compuesto por dos dipolos



Usando el resultado anterior para el dipolo

$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(r - \frac{d}{2}\right)^{-3} - \left(r + \frac{d}{2}\right)^{-3}\right)\hat{\jmath} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\left(1 - \frac{d}{2r}\right)^{-3} - \left(1 + \frac{d}{2r}\right)^{-3}\right)\hat{\jmath}$$

Aproximando $\left(1 \pm \frac{d}{2r}\right)^{-3} \approx 1 \mp \frac{3d}{2r}$

$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 + \frac{3d}{2r} - \left(1 - \frac{3d}{2r}\right)\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{E} \approx \frac{3qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\jmath}$$

Problema 2. Se tiene un alambre circular de radio R, con densidad de carga descrita por la función $\lambda_{(\theta)} = 3\sin(\theta)\cos(\theta)$. Calcule el campo eléctrico producido por este alambre sobre todo su eje.

La expresión del campo eléctrico producido por un distribución de carga unidimensional es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{|\vec{r_0} - \vec{r}|^3}(\vec{r_0} - \vec{r})\, dl$$

Para este problema: La posición donde se calcula el campo eléctrico $\vec{r_0} = h\hat{k}$, la posición de la distribución de carga parametrizada $\vec{r} = R\cos(\theta)\,\hat{\imath} + R\sin(\theta)\,\hat{\jmath}$, la distancia de la distribución al punto donde se calcula el campo eléctrico $|\vec{r_0} - \vec{r_i}|^3 = (R^2 + h^2)^{3/2}$ y el diferencial $dl = R\, d\theta$

$$\vec{E} = \frac{3R}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + h^2)^{3/2}}\left(-R\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\sin(\theta)\, d\theta\,\hat{\imath} - R\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\cos(\theta)\, d\theta\,\hat{\jmath} + h\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta\,\hat{k}\right)$$

Resolviendo las integrales

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Problema 3. Dos partículas idénticas de carga $q > 0$, están fijas en el espacio y separadas por una distancia d. Un electrón (carga $-e$) es libre de moverse y permanece inicialmente en reposo. Demuestre que si la distancia del electrón a las cargas (x) es pequeño comparado con la distancia de separación entre las cargas ($x \ll d$), el movimiento del electrón será un movimiento armónico simple y determine el periodo de ese movimiento.

La fuerza eléctrica está descrita por la ley de Coulomb

$$\vec{F} = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r_0} - \vec{r_i}|^3}(\vec{r_0} - \vec{r_i})$$

Los vectores son similares a los descritos en el Problema 1

$$\vec{F} = -\frac{qex}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}\hat{\imath} = -\frac{4qex}{\pi\varepsilon_0 d^3\left(\frac{4x^2}{d^2} + 1\right)^{3/2}}\hat{\imath}$$

Como $x \ll d$, podemos aproximar $\left(\frac{4x^2}{d^2} + 1\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{2x^2}{3d^2} \approx 1$

$$\vec{F} = -\frac{4qex}{\pi\varepsilon_0 d^3}\hat{\imath}$$

Por otra parte, la segunda ley de Newton le dice a las cosas como moverse

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\hat{\imath}$$

Igualando las dos última ecuaciones:

$$\vec{F} = -\frac{4qex}{\pi\varepsilon_0 d^3}\hat{\imath} = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\hat{\imath}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{4qe}{\pi\varepsilon_0 m d^3}x = 0$$

Que es la ecuación de un movimiento armónico simple.
Se puede ver que la frecuencia angular es:

$$\omega^2 = \frac{4qe}{\pi\varepsilon_0 m d^3}$$

Pero también $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^3\varepsilon_0 m d^3}{qe}}$$